المبادئ العامة لتحريك الجسيم المادي 2

د.اسكندر عمجة

4/11/2015
21 S.P
نظري
06
07
فريق الكرّيات الحمراء التطوعي
RBC HAMAK
التحريك

العزم االحركي لجسم مادي:

نعد جسيما ماديا $\mathrm{M_k}$ كتلته m_k يتحرك على مسار منحن تحت تأثير القوة F_k بالنسبة لجملة محاور إحداثية $T(OXYZ)$ فيكون تعريف العزم الحركي جسيم المادي M_k و يدعى أيضا بالعزم الزاوي بالنسبة لنقطة ثابتة O و يرمز له ب m_0 أو محور ثابت Δ و يرمز له ب m_Δ هو عزم كمية الحركة $q_k = m_k.V_k$ للجسيم المادي M_k بالنسبة للنقطة الثابتة O أو المحور الثابت Δ

فعلاقة العزم الحركي لجسيم المادي بالنسبة للنقطة O و يكون:

$$\boldsymbol{m_O = m_O(q_k) = OM_k \wedge m_k.V_k}$$

بالنسبة للمحور Δ يكون:

$$m_\Delta = m_\Delta(q_k) = (OM_k \wedge m_k.V_k).u$$

حيث u **المتجهه الواحدي** للمحور الثابت Δ وO هي نقطة منه

و القيمة العددية للعزم الحركي الناتج من تعريف الجداء الشعاعي هو:

$$m_O = r_k.m_k.V_k.\sin\theta = m_k.V_k.h_k$$

حيث θ الزاوية المحصورة بين المتجهين q_k وr_k

و $(h_k = r_k.\sin\theta)$ فانه يمثل العزم الناتج فيكون عموديا على مستوي المتجهين q_k وr_k و اتجاهه يتحدد بتطبيق حركة اليد اليمنى:

أما القيمة العددية بدلالة مركبات q_k وr_k و التي تمثل كمية الحركة الخطية للجسيم المادي حول محاور الاحداثيات الثلاثة:

$$m_X = m_k(y_k.V_z - z_k.V_y)$$

$$m_Y = m_k(z_k.V_X - x_k.V_z)$$

$$m_Z = m_k(x_k.V_Y - y_k.V_X)$$

أما اذا تحرك الجسيم المادي في المستوي OXYفان :

$$z_k = 0 \Rightarrow V_z = 0 \Rightarrow m_Y = m_X = 0$$

ويكون في هذه الحالة متجه عزم كمية الحركة عموديا على المستوي OMY و تعين قيمته تماما بالكمية التالية:

$$m_z = m_k(x_k.V_Y - y_k.V_X)$$

و يمكن أن تكون قيمة العزم الحركي موجبة أو سالبة وذلك حسب الاتجاه الذي يراقب منه الجسيم المادي من النقطة الثابتة O ووحداته بالمجموعة المطلقة $\mathrm{Kg.m^2/sec}$.

المبدأ الثالث:

مبدأ العزوم لجسيم مادي:

$$\frac{d}{dt}m_O = \frac{d}{dt}OM_k \wedge m_k.V_k + OM_k \wedge \frac{d}{dt}m_k.V_k$$

$$\frac{d}{dt}m_O = V_k \wedge m_k.V_k + OM_k \wedge \sum F_k$$

$$\frac{d}{dt}m_O = OM_k \wedge \sum F_k = m_O(F_k)$$

و ذلك لأن:

$$\frac{d}{dt}OM_k = V_k \Rightarrow V_k \wedge V_k = 0 \quad , \quad \frac{d}{dt}m_K.V_k = \sum F_k$$

$$\frac{d}{dt}m_\Delta = \left[OM_k \wedge \sum F_k\right].u = m_\Delta(F_k)$$

و ذلك لأن المحور Δ ثابت بالتالي:

$$\frac{d}{dt}u = 0$$

ان مشتق العزم الحركي بالنسبة للزمن لجسيم مادي حول نقطة ثابتة أو حول محور ثابت يساوي محصلة عزوم القوى المؤثرة على هذا الجسيم بالنسبة للنقطة الثابتة أو المحور الثابت.

ملاحظة: إذا كانت عزوم القوة المؤثرة حول النقطة الثابتة أو المحور الثابت معدوما فان عزم كمية حركة الجسيم حول النقطة الثابتة أو المحور الثابت يبقى ثابتا بالمقدار و الاتجاه أي :

$$(m_O)_{t_1} = (m_O)_{t_2}$$

بالمثل نحصل على:

$$(m_\Delta)_{t_1} = (m_\Delta)_{t_2}$$

بضرب طرفي العلاقة بـdt نحصل على:

$$dm_O = OM_k \wedge \sum F_k.dt = OM_k \wedge \sum dI_k$$

بتكامل طرفي العلاقة الأخيره بين اللحظتين t_2, t_1:

$$(m_O)_{t_2} - (m_O)_{t_1} = \int_{t_1}^{t_2} OM_k \wedge \sum dI_k$$

كذلك بالنسبة للمحور Δ :

$$(m_\Delta)_{t_2} - (m_\Delta)_{t_1} = \int_{t_1}^{t_2} [OM_k \wedge dI_k].u$$

نص مبدأ العزوم لجسيم مادي:

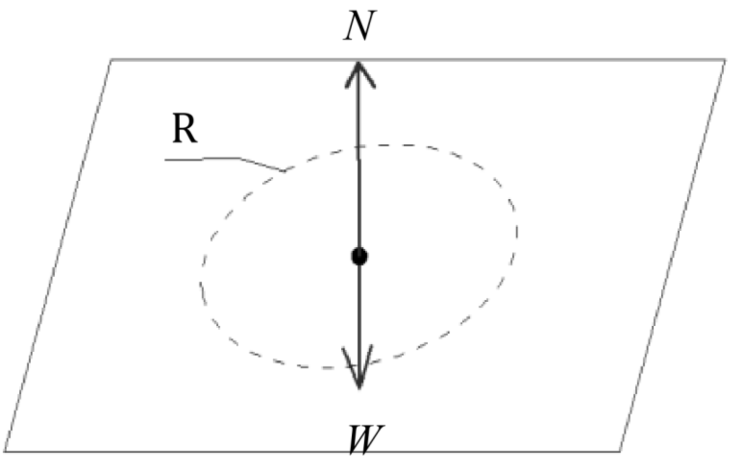
إن تغير العزم الحركي لجسيم مادي M_k بالنسبة لنقطة ثابتة O أو بالنسبة لمحور ثابت Δ بين اللحظتين t_2, t_1 يساوي إلى تكامل عزوم مجموع الدفوعالجزئية للقوى المؤثرة على الجسيم المادي بين هاتين اللحظتين بالنسبة للنقطة الثابتة أو المحور الثابت

مسألة: يسحب السلك ببطء نحو الأسفل من r

فيصبح $r = \frac{1}{2}R$

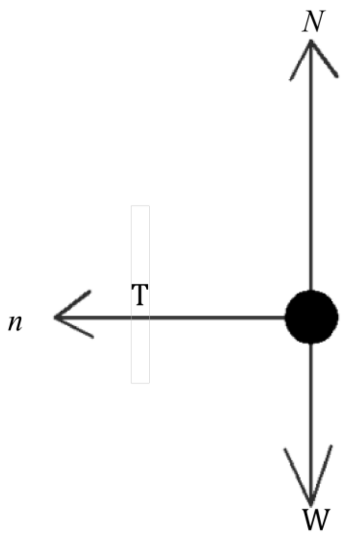
المطلوب:

1. سرعة الجسيم عندئذ
2. احسب شد الخيط $T_r = ?$



الحل:

1- قبل اختيار أحد المبادئ نرسم مخطط جسم الحر للجسيم



$$\frac{1}{2}mv_r^2 - \frac{1}{2}mv_R^2 = W_{T0} + W_{N_0} + W_{W_0}$$

$$W_{T0} = 0 \quad , \quad W_{N_0} \quad , \quad W_{W_0}$$

$$v_r = vR = \omega_0 R$$

$$w_1 \frac{R}{2} = \omega_0 R$$

$$w_1 = 2\omega_0$$

نلاحظ أن عزم القوى المؤثرة على الجسيم بالنسبة للنقطة o هي معدومة لذا نختار مبدأ العزم لحل المسألة

$$(m_0)^r = (m_0)^R$$

$$m\, v_r\, h_r = m\, v_R\, h_R$$

$$v_r - \frac{R}{2} = v_R . R$$

$$v_r = 2v_R$$

2- لحساب شد الخيط نطبق العلاقة أساسية على الجسيم عند الموضع r

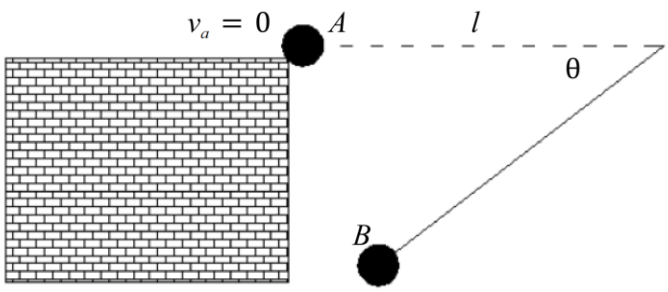
$$m. \overrightarrow{A_r} = \overrightarrow{T_r} + \vec{N} + \vec{W}$$

بإسقاط على الناظم:

$$m\frac{v_r^2}{r} = T_r$$

$$T_r = m\frac{4v^2 R}{\frac{R}{2}} = 8\frac{m}{R}v_R^2$$

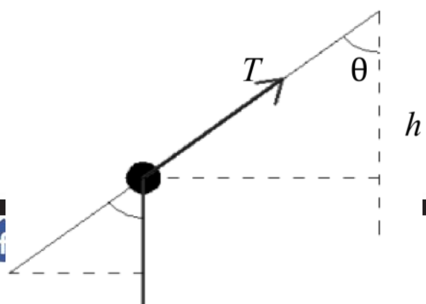
مسألة:



المطلوب:

1. إيجاد علاقة السرعة $v\theta = f(\theta)$
2. $T\theta = f(\theta)$ و من ثم احسب الشد الأعظمي و موقعه
3. أوجد سرعة الجسيمين و تسارع لحظة انقطاع الحبل

الحل:



نرسم مخطط الجسم الحر:

$$E^B - E^A = \sum w = W_W + W_T$$

$$W_w = \pm m\, g\, h$$

$$W_W = m\, g\, .l. \sin\theta$$

$$\frac{1}{2} m v_\theta^2 = m\, g\, l \sin\theta$$

$$v_\theta^2 = 2\, g\, l \sin\theta$$

ندرس حركة الجسيم على الشاقول و إذا كانت قوة ثابتة و لكن هذا خطأ لأنه احتمال غلط كبير

$$v_\theta^2 - v_0^2 = 2\, g\, \Delta y$$

$$v_\theta^2 = 2 g l \sin\theta$$

و لتحديد T_θ نطبق العلاقة الأساسية عند الموضع θ

$$m\, \overrightarrow{A_\theta} = \overrightarrow{W} + \overrightarrow{T_\theta}$$

بإسقاطها على الناظم

$$m A^n = T_\theta - w \sin\theta$$

$$m \frac{v_\theta^2}{l} = T_\theta - m g \sin\theta$$

$$T_\theta = \frac{m}{l} v_\theta^2 + m g \sin\theta$$

$$T_\theta = \frac{m}{l} 2\, g\, l \sin\theta + m g \quad \sin\theta$$

$$T_\theta = 3 m\, g \sin\theta$$

علاقة قوة الشد بدلالة θ

يكون أعظميا عندما:

$$\theta = 1 \Rightarrow \theta = 90$$

وقيمته

$$T_{\theta=90} = T_{max} = 3mg$$

اذا كان الحبل يتحمل$1.5\ T_{max}$ أوجد الزاوية التي ينقطع فيها الحبل فيما لو حملنا $\grave{m} = 2m$

ندرس الحالة جديدة بتطبيق علاقة T_θعندئذ

$$T_{\grave{\theta}} = 6mg \sin \grave{\theta}$$

لكن: $T_{\grave{\theta}} = 1.5\ \times 3\ mg = 4.5mg$

ومنه باالتعويض:

$$4.5mg = 6mg \sin \grave{\theta}$$

$$\sin \grave{\theta} = \frac{4.5}{6}$$

3. احسب سرعة جسيم و تسارع جسيم لحظة ترك الحبل (أي انقطاع)

لإيجاد سرعة الجسيمين نعوض في علاقة السرعة

$$v_\theta^2 = 2\ g.l.\sin \theta$$

$$\theta = \grave{\theta}$$

$$v^2_{\theta=\grave{\theta}=63} = \quad 2v_\theta \qquad m/s$$

لايجاد التسارع اللحظة عند الموضع $\grave{\theta} = 63$

$$A_{\grave{\theta}} = \overrightarrow{A^n_{\grave{\theta}}} + A^t \grave{\theta}$$

$$A^n_{\grave{\theta}} = \frac{v^2_{\grave{\theta}}}{l} = \quad cm/s$$

$$A^t_{\grave{\theta}} = g \cos \theta$$

$$mA = T + W$$

باسقاطها على المماس:

$$mA^t = W \cos \theta$$